# 第三单元 一元函数的导数及其应用

## 基础课16 导数的概念及其意义、导数的运算

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 已知函数（为常数），，则（ A ）.

A. , B. ,

C. ， D. ,

[解析]由题意得,.故选.

2. [2024·成都月考]已知函数，则（ D ）.

A. 3 B. 5 C. 7 D. 6

[解析]根据题意，，

故.故选.

3. [2024·沧州月考]一质点做直线运动，它所经过的路程与时间的函数关系为，若该质点在时间段内的平均速度为，当时的瞬时速度为，则（ C ）.

A. 10 B. 16 C. 26 D. 28

[解析],

，,则.

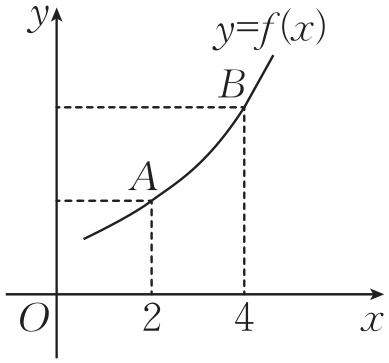
故选.

4. 已知函数的图象在点处的切线方程是，则的值为（ B ）.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

[解析]由 的图象在点 处的切线方程是,可得,当 时，,故,则.故选.

5. 已知函数的部分图象如图所示，是函数的导函数，则（ A ）.



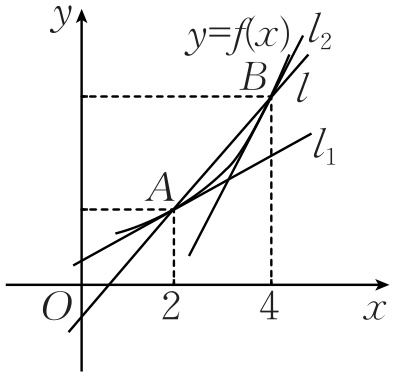
A. B.

C. D.

[解析]如图所示，根据导数的几何意义，可得 表示曲线 在点 处的切线的斜率，即直线 的斜率，表示曲线 在点 处的切线的斜率，即直线 的斜率,

由平均变化率的定义，可得 表示过,两点的割线的斜率，

结合图象，可得，所以.故选.

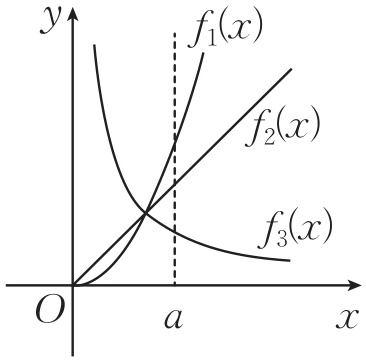


6. [2024·福建月考]曲线在处的切线方程为（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]，所以，因为，所以 的图象在 处的切线方程为.故选.

7. 已知函数的导函数为,,,的图象如图所示，则（ A ）.



A. B.

C. D.

[解析],,分别表示,,的图象在 处对应的切线的斜率，根据题目图象知.故选.

8. [2024·延安测试]若曲线在点处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为2，则（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]，

，.

， 切线方程为，

可化为.

令，得，令，得，

，解得.故选.

#### 综合提升练

9. [2024·德州模拟]（多选题）已知函数的导函数为，若存在，使得，则称是的一个“巧值点”，则下列函数中有“巧值点”的是（ ABC ）.

A. B. C. D.

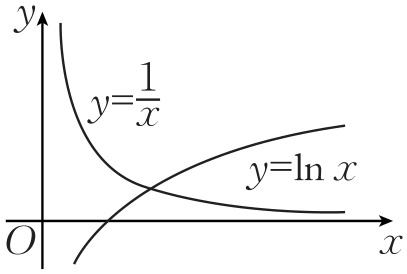
[解析]对于，，令，得 或，故有“巧值点”；

对于，，令，得，故有“巧值点”；

对于，，

令，

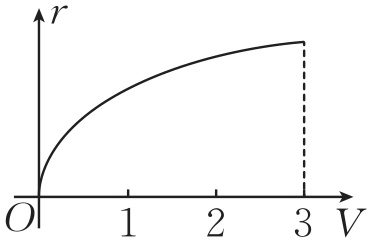
作出 与 的部分图象，如图，



结合，的图象，知方程 有解，故有“巧值点”；

对于，，令，方程无解，故无“巧值点”.故选.

10. [2024·广东模拟]（多选题）吹气球时，记气球的半径与体积之间的函数关系为，为的导函数.已知在上的图象如图所示，若，则下列结论正确的是（ BD ）.



A.

B.

C.

D. 存在，使得

[解析]设,，由题图得 ，且均为锐角，所以 ,所以，所以 错误；

由题图得，随着 值的变大，图象上点的切线的斜率越来越小，根据导数的几何意义得，所以 正确；

设,,则,，由题图可知，所以 错误；

表示,两点所在直线的斜率，表示 处切线的斜率，因为，所以可以平移直线 使之和曲线相切，切点就是点,所以 正确.故选.

11. [2024·上海月考]已知,为实数，函数的图象在处的切线方程为，则的值为  .

[解析]因为，所以，则，

由 处的切线方程为，得切线的斜率，

所以，得，

所以，当 时，，所以切点为,，

将,代入切线方程得，解得，

所以.

12. [2024·重庆月考]（双空题）已知函数，则的导函数  ，函数的图象在处的切线方程为  .

[解析]因为函数，

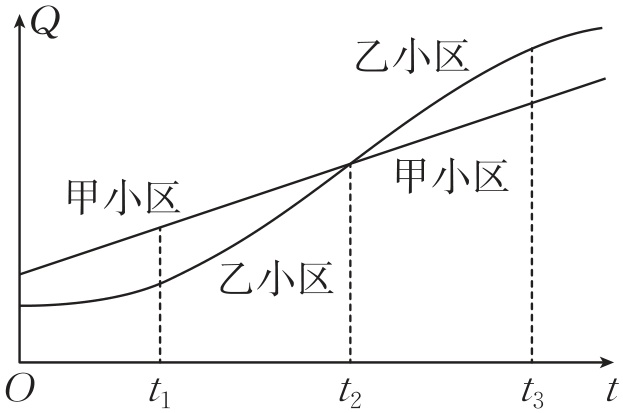
所以，

所以,，

所以函数 的图象在 处的切线方程为，即.

#### 应用情境练

13. [2024·北京月考]某市实施垃圾分类，家庭厨余垃圾的分出量不断增加.已知甲、乙两个小区在这段时间内的家庭厨余垃圾的分出量与时间的关系如图所示.



给出下列四个结论：

①在这段时间内，甲小区的平均分出量比乙小区的平均分出量大；

②在这段时间内，乙小区的平均分出量比甲小区的平均分出量大；

③在时刻，甲小区的分出量比乙小区的分出量增长得慢；

④甲小区在，，这三段时间中，在的平均分出量最大.

其中所有正确结论的序号为②③.

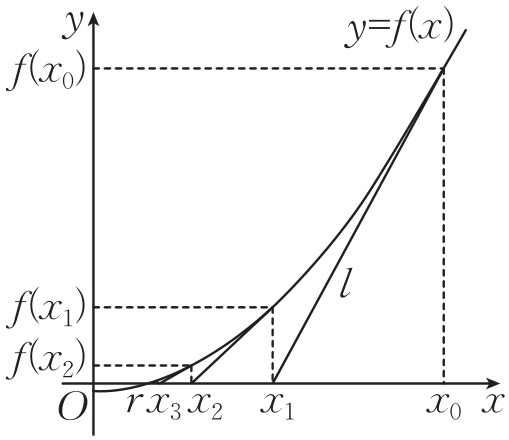
[解析]对于①，在 这段时间内，甲小区的增长量小于乙小区的增长量，所以甲小区的平均分出量小于乙小区的平均分出量，说法错误.

对于②,在 这段时间内，甲小区的增长量小于乙小区的增长量，所以乙小区的平均分出量大于甲小区的平均分出量，说法正确.

对于③,在 时刻，乙小区的图象比甲小区的图象陡，瞬时增长率大，说法正确.

对于④,甲小区的图象大致为一条直线，所以三个时间段的平均分出量相等，说法错误.

14. [2024·重庆检测]牛顿迭代法是牛顿在17世纪提出的一种求方程近似根的方法.如图，设是的根，选取作为的初始近似值，过点作曲线的切线,与轴的交点的横坐标，称是的“一次近似值”，过点作曲线的切线，则该切线与轴的交点的横坐标，称是的“二次近似值”，重复以上过程，得到的近似值序列.若，取作为的初始近似值，则的正根的“三次近似值”为  .（请用分数作答）



[解析]由题意得,，

当 时，,,.

#### 创新拓展练

15. 在18世纪，法国著名数学家拉格朗日在他的《解析函数论》中，第一次提到拉格朗日中值定理，其定理陈述如下：如果函数在区间上连续不断，在区间内可导（存在导函数），在区间内至少存在一个点，使得，那么称为函数在区间上的中值点.函数在上的中值点的值为  .

[解析]当 时，由拉格朗日中值定理可得，

，

，即，

.

16. 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率，曲线的曲率定义如下：若是的导函数，是的导函数，则曲线在点处的曲率.

（1）若曲线与在点处的曲率分别为,，比较,的大小；

（2）求正弦曲线曲率的最大值.

[解析]（1）因为，，

所以，

因为，，

所以，

所以.

（2），，

所以，

，

令，则，,

设，则，

显然当 时，，单调递减，所以,故 的最大值为1，所以 的最大值为1.